

**Об отыскании обобщенно-периодических решений
автономных систем дифференциальных уравнений
в распределенной компьютерной среде
с использованием символьных вычислений**

Пчелинцев А.Н., Погонин В.А.

Аннотация: В работе приводится описание общего метода построения обобщенно-периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений, а также алгоритма отыскания таких решений в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений.

Ключевые слова: обобщенно-периодические решения, автономная система дифференциальных уравнений, распределенная компьютерная среда.

**On finding generally periodic solutions of autonomous systems of
differential equations in a distributed computing environment using
symbolic computation**

Pchelintsev A.N., Pogonin V.A.

Abstract: In a work there is given the description of the general method of a construction of the generally periodical solutions of the autonomous systems of the differential equations and the algorithm of the finding of such solutions in a distributed computing environment with the using of a symbolic calculations.

Key words: generally periodical solutions, autonomous system of the differential equations, distributed computing environment.

Введение

Рассмотрим нормальную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – векторная функция действительного переменного t , $f = (f_1, \dots, f_n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = \overline{1, n}$) на некотором открытом подмножестве Γ евклидова векторного пространства R^n .

Одной из важнейших в теории динамических систем, как известно, является проблема изучения поведения траекторий системы (1) на инвариантных и минимальных множествах. Многие классические результаты в данной области так или иначе относятся к случаю, когда порядок рассматриваемой системы n равен двум, и связаны с теоремой Пуанкаре-Бендиксона и ее обобщениями [1-3]. Что же касается многомерных систем, то характерными результатами здесь являются теоремы Биркгофа о рекуррентных траекториях и минимальных множествах, теоремы возвращения Пуанкаре-Каратеодори и Хинчина, а также эргодические теоремы [2]. Вместе с тем, в работах [1, 4-7] показано, что каждое непустое компактное минимальное множество содержит рекуррентные траектории, описываемые обобщенно-периодическими решениями и только ими.

Таким образом, обобщенно-периодические решения определяют ситуацию типического поведения на компактных подмножествах пространства R^n . Вместе с тем, структура большинства таких решений весьма сложна, так что проблема их построения в каждом конкретном случае совсем нетривиальна. Основная теорема, приведенная в работе [1, с. 146, 147], намечает путь, метод и алгоритм построения обобщенно-периодических решений в распределенной компьютерной среде.

Цель данной работы – рассмотреть алгоритм построения обобщенно-периодических решений в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений.

Обобщенно-периодические решения

Определение 1. Пусть решение $\varphi(t)$ системы (1) определено и ограничено для всех $t \in R$. Будем говорить, что $\varphi(t)$ – обобщенно-периодическое решение, если для каждой пары ε, T положительных чисел можно указать такое натуральное число N , что при $t \in R$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + NT)| < \varepsilon.$$

Простейшими примерами таких решений могут служить периодическое решение и положение равновесия. Также частным случаем обобщенно-периодического решения является почти периодическое решение (см. [1, с. 162]). Более того, как показано в книге [1], обобщенно-периодическим решением может быть только решение, траектория которого рекуррентна, и обратно. Отметим также, что каждое обобщенно-периодическое решение устойчиво по Пуассону. Обратное, вообще говоря, неверно.

Существование обобщенно-периодических решений определяет следующая теорема.

Теорема 1. Пусть Σ – компактная часть пространства R^n и $q(t)$ – некоторое решение системы (1), целиком содержащееся в Σ . Тогда для каждого положительного числа T из каждой последовательности

$$N_1, N_2, \dots, N_k, \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty \quad (2)$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_l}, \lim_{l \rightarrow \infty} N_{k_l} = \infty, \quad (3)$$

что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} q(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset R$ и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})T) = \varphi(t) \quad (4)$$

равномерно на всей оси R , где $\varphi(t)$ – некоторое устойчивое по Пуассону решение.

Доказательство теоремы 1 содержится в работе [1]. Отметим только, что в ее условиях выбор последовательности (3) не зависит от выбора числа T и обратно.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 устойчивое по Пуассону решение $\varphi(t)$ является обобщенно-периодическим.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ – решение, устойчивое по Пуассону. Зафиксируем некоторое положительное число T и последовательность (3). Для простоты обозначений положим, что выбранная последовательность (3) совпадает с (2). Тогда равенство (4) примет вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t + (N_{k+1} - N_k)T) = \varphi(t), \quad (5)$$

где по теореме 1 сходимость равномерна на всей оси R . Из (5) следует неравенство

$$|\varphi(t + \Delta N_k T) - \varphi(t)| < \varepsilon,$$

где $\Delta N_k = N_{k+1} - N_k$ – некоторое натуральное число. Тогда по определению 1 $\varphi(t)$ – обобщенно-периодическое решение.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Устойчивость по Пуассону в дискретных динамических системах

Предположим, что Σ – компактная часть пространства R^n , и пусть U^N – дискретная динамическая система, характеризуемая гомеоморфным отображением U множества Σ в себя.

Определение 2. Точку $p \in \Sigma$ назовем положительно устойчивой по Пуассону, если для каждой ее окрестности E и каждого натурального числа k можно указать такое натуральное число $N_k > k$, что $U^{N_k} p \in E$. Аналогичным образом, точку $p \in \Sigma$ назовем отрицательно устойчивой по Пуассону, если для каждой ее окрестности E и каждого натурального

числа k можно указать такое натуральное число $N_k > k$, что $U^{-N_k}p \in E$. И, наконец, будем говорить, что точка $p \in \Sigma$ устойчива по Пуассону, если она одновременно и положительно, и отрицательно устойчива.

Легко видеть, что точка $p \in \Sigma$ положительно устойчива по Пуассону тогда и только тогда, когда найдется такая последовательность вида (2), что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U^{N_k} p = p. \quad (6)$$

Осуществим построение устойчивых по Пуассону точек в системе U^N . Следуя [1, 2], рассмотрим некоторое множество $E \subset \Sigma$ и посредством равенства

$$F = E \setminus (E \cap (U^{-1}E \cup U^{-2}E \cup \dots \cup U^{-k}E \cup \dots))$$

введем в рассмотрение множество F , очевидно, являющееся той частью множества E , которая не содержит точки множеств

$$U^{-1}E, U^{-2}E, \dots, U^{-k}E, \dots$$

Тогда

$$U^{-k}E \cap F = \emptyset, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Но так как по построению $F \subset E$, отсюда следует, что

$$U^{-k}F \cap F = \emptyset, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Поэтому, как легко видеть,

$$U^k E \cap F = \emptyset, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

и, тем более,

$$U^k F \cap F = \emptyset, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Заметим, что множество Σ сепарабельно, то есть в Σ существует счетное всюду плотное множество P . Пусть

$$E_1, E_2, \dots, E_k, \dots \quad (7)$$

– счетное множество окрестностей точек $p_k \in P$, таких, что $p_k \in E_k$, и, следовательно, объединение множеств (7) покрывает множество Σ . Действуя как и ранее, для каждого множества семейства (7) построим соответствующее множество F_k и положим

$$G^+ = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k \cup \dots$$

и

$$H^+ = \Sigma \setminus G^+.$$

Тогда множество H^+ будет содержать положительно устойчивые по Пуассону точки системы U^N , а множество G^+ – нет.

В самом деле, пусть $p \in H^+$ и пусть E_i – любая окрестность, содержащая точку p . По определению множества H^+ точка p не принадлежит множеству F_i и, потому, для некоторого значения k принадлежит множеству $E_i \cap U^{-k}E_i$. Поэтому, применив отображение U^k к включению

$$p \in E_i \cap U^{-k}E_i,$$

получим

$$U^k p \in E_i,$$

откуда непосредственно следует, что точка p положительно устойчива по Пуассону.

Пусть теперь $p \in G^+$. Тогда найдется некоторая окрестность U_j точки p , такая, что $p \in F_j$. Так как для всех значений $k = 1, 2, 3, \dots$ по построению

$$U^k F_j \cap U_j = \emptyset,$$

то, тем более,

$$U^k p \cap U_j = \emptyset,$$

т.е. точка p покидает свою окрестность U_j и не возвращается в нее. Последнее, очевидно, означает, что точка p не может быть положительно устойчивой по Пуассону.

Таким образом, множества положительно устойчивых H^+ по Пуассону и неустойчивых G^+ по Пуассону точек построены. Очевидно, что аналогичным образом строятся множества отрицательно устойчивых H^- и неустойчивых G^- точек. Положим

$$H = H^+ \cap H^-,$$

завершая тем самым построение множества H устойчивых по Пуассону точек в системе U^N .

Замечание. Если искать решение системы (1) в виде ряда по степеням t , то построение дискретной системы U^N может быть осуществлено с использованием символьных вычислений в распределенной компьютерной среде.

Построение обобщенно-периодических решений

Пусть $\varphi(t, p)$ – решение системы (1) с начальным условием

$$\varphi(0, p) = p$$

и пусть

$$\varphi(NT, p), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

– множество положений в дискретные моменты времени NT . Тогда дискретной динамической системой вдоль решения $\varphi(t, p)$ системы (1) будем называть семейство отображений g^N , определяющих положения (8).

Переходя к построению обобщенно-периодических решений в системе (1), заметим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Следующие два утверждения эквивалентны:

1) точка p устойчива по Пуассону в системе g^N ;

2) $\varphi(t, p)$ – обобщенно-периодическое решение системы (1).

Доказательство. Если справедливо утверждение 2, то очевидно, что справедливо также и утверждение 1. Обратно, если справедливо утверждение 1, то найдется такая последовательность вида (2), что имеет место равенство (6). Тогда в силу теоремы 1 из последовательности (2) можно выбрать такую ее последовательность (3), что равенство (4) выполнено равномерно на всей оси $\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме 2 $\varphi(t, p)$ – обобщенно-периодическое решение системы (1).

Таким образом, теорема 3 доказана.

Если принять компактность множества Σ , то в силу теорем 1 и 2 несложно заметить, что в Σ существуют обобщенно-периодические решения системы (1). Следовательно, согласно теореме 3 построенное выше множество H (применительно, конечно, к системе g^N) не пусто и содержит точки p , для которых $\varphi(t, p)$ – обобщенно-периодическое решение системы (1). При этом процедура построения устойчивых по Пуассону точек в дискретных системах может быть реализована в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений.

В самом деле, для простоты будем считать, что множество C_n представляет n -мерный куб, ребро которого равно a . Зададимся величиной ε , которую назовем точностью отыскания обобщенно-периодических решений. Разобьем куб C_n на кубы с ребрами 2ε . Тогда количество полученных кубов равно

$$m_c = N_p^n, \quad N_p = \text{round} \frac{a}{2\varepsilon},$$

где N_p – количество точек, приходящихся на ребро куба,

$$\text{round } z = \begin{cases} z, & \text{если } z - \text{целое,} \\ [z] + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Внутри i -го куба ($i = \overline{1, m}$) возьмем точку $P_i^{(0)}$, лежащую в его центре. Эта точка является начальной для некоторого решения $x(t, P_i^{(0)})$ системы (1). Среди таких решений будем отыскивать обобщенно-периодические. Тракторию, соответствующую точке $P_i^{(0)}$, обозначим через L_i ; j -ую координату точки $P_i^{(0)}$ обозначим через $p_{i,j}^{(0)}$ ($j = \overline{1, n}$). Центр куба обозначим точкой H_c , координаты h_{c_j} которой задаются.

На начальном этапе вычислений сформируем множество начальных точек рекурсивным алгоритмом перебора с возвратом. Суть работы этого алгоритма заключается в следующем. Зафиксируем первые $n-1$ координаты, положив их равными

$$p_{i,j}^{(0)} = h_{cj} - \frac{a}{2} + \varepsilon \equiv b_j,$$

изменяя при этом последнюю с шагом 2ε (ее начальное значение равно b_n).

После перебора всевозможных значений для последней координаты (при этом каждый раз, получая очередную точку, записываем ее в базу данных) увеличиваем (как бы возвращаясь назад) $n-1$ -ю координату на 2ε и опять начинаем перебирать всевозможные значения последней координаты. Опять возвращаемся назад, увеличивая $n-1$ -ую координату, и так до тех пор, пока не переберем всевозможные значения $n-1$ -ой координаты. Затем увеличиваем $n-2$ -ю координату на 2ε . Принимая $n-1$ -ую координату, равной b_{n-1} , начинаем перебирать последнюю координату, после чего возвращаемся, увеличивая $n-1$ -ю координату на 2ε .

Перебрав всевозможные значения $n-2$ -ой координаты, повторяем ту же самую процедуру для координаты с номером $n-3$. Таким образом, мы сформируем массив точек для n -мерной сетки.

Дальнейшие вычисления для каждой точки $P_i^{(0)}$ не будут зависеть от расчетов для соседних точек, что позволяет реализовать их распределенной компьютерной среде. Тогда координаты начальных точек $P_i^{(0)}$ будем хранить в сетевой базе данных, обслуживаемой, например, СУБД MySQL.

Теперь разложим решение $x(t, P_i^{(0)})$ в ряд по степеням t на некотором отрезке $[0, T]$, где величина T задается, причем достаточно малой. Перед началом расчетов в базу данных необходимо записать множество символьных выражений для производных ряда до некоторого заданного порядка. Это множество может быть получено символьным дифференцированием правой части системы (1) с помощью пакета символьных вычислений *Maxima* в распределенной компьютерной среде. Взаимодействие с пакетом осуществляется посредством перенаправления ввода/вывода. Процесс, осуществляющий символьное дифференцирование в распределенной компьютерной среде, формирует текстовый файл с командами пакета *Maxima* (например, функция `diff()` осуществляет символьное дифференцирование ее аргумента – функции от времени), далее вызывает пакет *Maxima*, перенаправляя ввод/вывод, – результаты работы пакет пишет в другой текстовый файл. Далее процесс открывает последний файл и, анализируя его, выделяет от туда символьные выражения для производных. Затем полученные выражения записываются в базу данных.

Подставляя в ряд значение времени T , с заданной точностью Δ вычислим координаты точки $P_i^{(1)}$, которая получена смещением точки $P_i^{(0)}$

по траектории L_i на время T , которое будем называть сдвигом. Такой процесс вычислений осуществляется для каждой i -ой точки i -ым процессом в распределенной компьютерной среде. При этом i -ый процесс, рассчитывая значения производных, входящих в степенной ряд, получает из базы данных символьные выражения для производных.

Вычислив точку $P_i^{(1)}$, мы можем остаться в ε -окрестности точки $P_i^{(0)}$ в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий. Тогда зададимся некоторым минимальным числом $N_{\min}$ сдвигов, начиная с которого начнем отслеживать возврат в ε -окрестность точки $P_i^{(0)}$. Чтобы получить точку $P_i^{(2)}$ через второй сдвиг, перенесем начальную точку по траектории L_i в точку $P_i^{(1)}$. Такая процедура необходима в силу того, что радиус сходимости степенного ряда может быть ограничен. Когда номер текущего сдвига $j \geq N_{\min}$, проверяем условие

$$|P_i^{(j)} - P_i^{(0)}| < \varepsilon.$$

Если оно выполняется, то точка $P_i^{(0)}$ является начальной для обобщенно-периодического решения. В противном случае продолжаем делать сдвиги по траектории L_i до некоторого заданного числа $N_{\max}$ сдвигов.

Если при расчетах не достаточно имеющихся в базе данных символьных выражений для производных, то анализируемая точка помечается как недосчитанная, и после анализа всех точек n -мерной сетки база данных сканируется на наличие хотя бы одной такой точки. Если недосчитанные точки имеются, то опять запускается процедура символьного дифференцирования для получения очередного множества производных.

Исходные тексты программы отыскания обобщенно-периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений в распределенной компьютерной среде можно найти по адресу [8].

Иллюстративный пример

В качестве одного из примеров описанный алгоритм был использован для построения обобщенно-периодических решений системы Лоренца

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3$$

при классических значениях ее параметров, то есть $\sigma=10$, $r=28$ и $b=8/3$. На рис. 1 приведена дуга траекторий одного из найденных решений, для которого $\varepsilon=0.11$, $T=0.001$, $a=0.44$, $\Delta=10^{-8}$, $N_{\min}=10$, $N_{\max}=11000$, центр куба был взят вблизи аттрактора Лоренца.

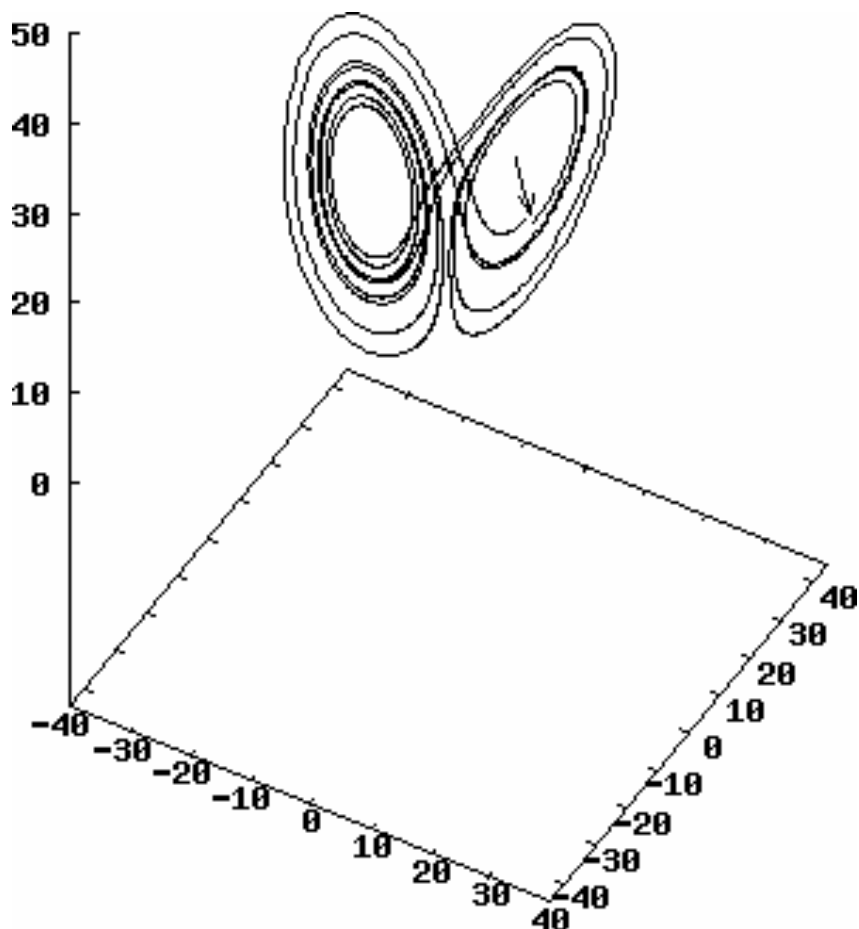


Рис. 1. Дуга траектории, построенная на отрезке времени $[0, 10.53]$ для начальной точки $(7.94796442, 12.58880493, 18.13439637)$.
Стрелкой отмечено возвращение в ε -окрестность.

Список литературы

1. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 240 с.
2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 552 с.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. Дзюба С.М. Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 8. – С. 1020-1023.

5. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Квазипериодические процессы в задачах управлений // Изв. РАН. Теория и системы упр. – 2001. – №2. – С. 22-28.
6. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, №10. – С. 1367-1372.
7. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, №11. – С. 1544-1549.
8. http://cluster.tstu.ru/tiki-download_file.php?fileId=2