Динамика сигналов в цифровых схемах: переход от булевой алгебры к новой алгебре

Пчелинцев Александр Николаевич

Тамбовский государственный технический университет

Тамбов, 2018

Переход от логического представления булевых функций к арифметическому представлению

Рассмотрим числовое множество $M = \{0; 1\}$.
На нем определены операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и производимые от них (например, импликация, альтернативная дизъюнкция и др.). Выразим эти логические операции через арифметические на множестве M:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= 1 - x, \\ x \wedge y &= x \cdot y, \\ x \vee y &= x + y - x \cdot y. \end{aligned} \tag{1}$$

К выражениям (1) добавим правило

$$x^m = x. \tag{2}$$

Выражение для булевой функции f, являющейся функцией входных сигналов схемы, теперь можно упростить по законам арифметических действий и правила (2).

Справедливость закона де Моргана

$$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}.$$

$$\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = 1 - \overline{x} \vee \overline{y} =$$
$$= 1 - (1 - x + 1 - y - (1 - x) \cdot (1 - y)) =$$
$$= x \cdot y = x \wedge y.$$

$$
\begin{aligned}
&f(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \vee X_2)(X_1 \vee X_3) = \\
&= (X_1 + X_2 - X_1X_2)(X_1 + X_3 - X_1X_3) = \\
&= X_1^2 + X_1X_2 - X_1^2X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - X_1X_2X_3 - \\
&-X_1^2X_3 - X_1X_2X_3 + X_1^2X_2X_3 = \\
&= X_1 + \cancel{X_1X_2} - \cancel{X_1X_2} + \cancel{X_1X_3} + X_2X_3 - X_1X_2X_3 - \\
&-\cancel{X_1X_3} - \cancel{X_1X_2X_3} + \cancel{X_1X_2X_3} = \\
&= X_1 + X_2X_3 - X_1(X_2X_3) = X_1 \vee X_2X_3.
\end{aligned}
$$

Ввод в булеву алгебру параметра "время"

Как известно, единичная ступенчатая функция или функция Хевисайда определена на области действительных чисел и возвращает число, принадлежащее множеству M:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно следующее утверждение: любой сигнал в логической схеме, включающий переход из одного логического состояния в другое, можно представить как сумму-разность функций Хевисайда, взятых с соответствующим аргументом.
Для функции h имеет место правило

$$\prod_{i=1}^{n} h(t-\tau_i) = h\left(t - \max_{i=\overline{1,n}} \tau_i\right), \qquad (3)$$

где τ_i – момент времени, когда происходит изменение сигнала.
Добавим формулу (3) к (1) и (2).

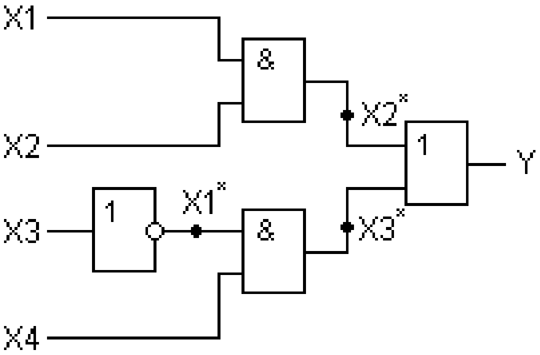
Задержки в логических элементах схемы

Теперь, зная аналитическое выражение для входных сигналов логической схемы, можно найти вид функции выходного сигнала.
Задержку сигнала в логическом элементе удобно моделировать как разность аргумента функции Хевисайда и длительности задержки, т.к. для существующих логических элементов в основном задержки по фронту (переход из 0 в 1) и спаду (переход из 1 в 0) примерно одинаковы.
Таким образом, *любой реальный логический элемент схемы можно моделировать как последовательное соединение звена чистого запаздывания по каждому входу и идеального логического элемента (здесь запаздывание равно длительности задержки).*

Алгоритм поиска сбойных состояний

1. Пусть исследуемая схема функционирует в соответствии с некоторым логическим выражением, задаваемым ДНФ.
2. Задаемся функциями входных сигналов, представляющие собой переходы в таблице истинности, выражаемые через функцию Хевисайда.
3. Идем по пути следования сигналов в логической схеме с целью поиска выражения для выходного сигнала схемы, применяя правила (1) – (3).
4. Если в полученном выражении присутствует разность функций Хевисайда, то мы имеем статический сбой; если присутствует функция Хевисайда с задерживающим аргументом, то сбой динамический.

Исследуем переход из набора 1111 в набор 1001 ($15 \to 9$) таблицы истинности для схемы, показанной на следующем рисунке.



Схема, реализующая булеву функцию $Y = X_1X_2 \vee \overline{X_3}X_4$.

$$\begin{aligned} X_1 &= 1, \\ X_2(t) &= 1 - h(t-5), \\ X_3(t) &= 1 - h(t-5), \\ X_4 &= 1. \end{aligned}$$

Предположим, что все элементы имеют одинаковые задержки, равные τ. Тогда

$$\begin{aligned} &X_1^*(t) = 1 - (1 - h(t-5-\tau)) = h(t-5-\tau), \\ &X_2^*(t) = 1 \cdot (1 - h(t-5-\tau)) = 1 - h(t-5-\tau), \\ &X_3^*(t) = X_1^*(t-\tau) \cdot 1 = h(t-5-2\tau), \\ &Y(t) = X_2^*(t-\tau) + X_3^*(t-\tau) - X_2^*(t-\tau) \cdot X_3^*(t-\tau) = \\ &= 1 - h(t-5-2\tau) + h(t-5-3\tau) - \\ &-(1 - h(t-5-2\tau)) \cdot h(t-5-3\tau) = 1 - h(t-(5+2\tau)) + \\ &+h(t-(5+2\tau)) \cdot h(t-(5+3\tau)) = 1 - h(t-(5+2\tau)) + \\ &+h(t-(5+3\tau)). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили статический сбой – в результирующее выражение входит разность функций Хевисайда.

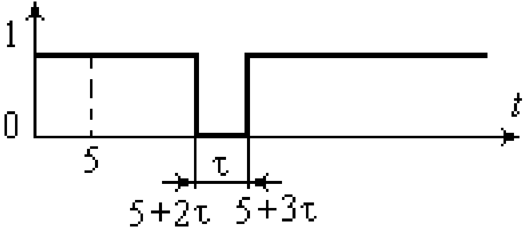


График сигнала $Y(t)$.

Литература

1. 1. Pchelintsev A.N. The failure risk analysis of digital circuits, 2013, arXiv: 1303.4051. https://arxiv.org/abs/1303.4051
2. 2. Пчелинцев А. Анализ цифровых схем на риски сбоя, Хабр, 2013. https://habr.com/post/202052/