О построении оптимального управления нелинейными системами по квадратичному критерию [1]

Дзюба С.М., Лобанов С.М., Пчелинцев А.Н. (г. Тамбов)
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, характеризуемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \tag{1.1}$$

в котором $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – n-мерный действительный вектор состояния, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ – m-мерный действительный вектор управления, A и B – действительные $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы, а $f = (f^1, \ldots, f^n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial u^j}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$.

Предположим, что начальное состояние

$$x(t_0) = c \tag{1.2}$$

задано, а задача управления системой (1.1) заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} [\langle e(t), Qe(t)\rangle + \langle u(t), Ru(t)\rangle]\, dt + \frac{1}{2}\langle e(T), Pe(T)\rangle, \tag{1.3}$$

в котором T – фиксированное конечное время, Q и P – положительные полуопределенные $(n \times n)$-матрицы, R – положительно определенная $(m \times m)$-матрица и $e(t)$ – ошибка системы, т.е.

$$e(t) = x(t) - z(t)$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-07-00136).

для всех значений $t_0 \le t \le T$, где $z = (z^1, \ldots, z^n)$ – n-мерный действительный вектор, характеризующий заданный режим функционирования системы (1.1).

Следуя работе [1], обозначим через $u_N(t), x_N(t)$ – некоторое N-е приближение к оптимальному управлению и состоянию в задаче (1.1)–(1.3). Тогда $(N+1)$-е приближение $x_{N+1}(t)$ может быть получено из решения системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_{N+1} = Ax_{N+1} + Bu_{N+1} + f(x_N, u_N), \quad x_{N+1}(t_0) = c, \tag{1.4}$$

где оптимальное управление $u_{N+1}(t)$ дается законом управления с обратной связью

$$u_{N+1}(t) = R^{-1}B'[h_{N+1}(t) - K(t)x_{N+1}(t)],$$

в котором $K(t)$ – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) + K(t)BR^{-1}B'K(t) - Q$$

с граничным условием

$$K(T) = P,$$

а $h_{N+1}(t)$ – решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{h}_{N+1}(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h_{N+1}(t) - Qz(t) + K(t)f(x_N(t), u_N(t)) \tag{1.5}$$

с граничным условием

$$h_{N+1}(T) = Pz(T). \tag{1.6}$$

Начальное приближение обычно определяется соотношениями

$$x_0(t) \equiv c$$

и

$$u_0(t) \equiv R^{-1}B'[Pz(T) - K(t)c].$$

Сходимость данной схемы последовательных приближений определяет следующая теорема.

Пусть L_2 – множество функций, определенных на отрезке $[t_0, T]$, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}^m$ и суммируемых с квадратом по Лебегу на $[t_0, T]$. Далее, пусть L_2^T – часть множества L_2, такая, что для каждой функции $u \in L_2^T$ уравнение (1.1) имеет абсолютно непрерывное решение $x(t)$, определенное для всех значений $t_0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющее начальному условию (1.2). В этих обозначениях имеет место

Теорема. *Для каждой точки* (t_0, c) *пространства* $\mathbb{R}^{1+n}$ *найдется такое действительное число* $T_0 > t_0$*, что для всех значений* $t_0 < T < T_0$ *задача* (1.1)–(1.3) *имеет решение* $x^*(t), u^*(t)$*. Более того, оказывается, что при* $t_0 \leq t \leq T$

$$u^*(t) = R^{-1}B'[h^*(t) - K(t)x^*(t)],$$

где $h^*(t)$ *– решение дифференциального уравнения*

$$\dot{h}^*(t) = -[A - BR^{-1}B'K(t)]'h^*(t) - Qz(t) + K(t)f(x^*(t), u^*(t))$$

с граничным условием

$$h^*(T) = Pz(T).$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1]. Выбор значения T зависит от вида функции f и определяется соотношениями, полученными также в работе [1].

Заметим, что правая часть уравнения (1.5) не зависит от функции $x_{N+1}(t)$. Поэтому существует и единственно его решение с граничным условием (1.6), что и определяет существование и единственность решения задачи (1.4), а также численную схему построения приближенных решений этих уравнений.

Литература

1. Афанасьев А.П., Дзюба С.М. Об оптимальном управлении нелинейными системами по квадратичному критерию // Труды ИСА РАН. – 2008. – Т. 32. – С. 49-62.